

Portraits de phase

pour un pendule conique

Introduction

On utilise ici la fonction **DEtools[DEplot]** (on trace des graphes et la résolution est numérique).

On envisage le cas d'une masse ponctuelle m oscillant sans frottement sur un cerceau de rayon L.
Le cercle tourne à la vitesse angulaire constante omega_cercle.
B désigne le point le plus bas du cerceau et H le point le plus haut.

Le problème est étudié dans le référentiel tournant non galiléen.

Deux remarques pour faciliter le travail:

- 1) les tracés sont plus rapides (mais moins précis) avec un pas (stepsize) plus grand.
- 2) il n'est pas toujours pratique d'avoir les graphes sur la feuille de travail: aller dans <Options> et sélectionner dans <Plot display> l'option:Window.

Programme

Tracé du diagramme d'énergie potentielle (bistabilité)

> **restart;**

On écrit l'expression de l'énergie potentielle Ep en fonction de l'angle theta, m, g, L,omega_cercle.
Origine des énergies potentielles en theta=0 (g: accélération de la pesanteur).

```

> Ep_pesanteur := m*g*L*(1-cos(theta(t)));
Ep_centrifuge := -m*L^2*omega_cercle^2*sin(theta(t))^2/2;
Ep:=Ep_pesanteur+Ep_centrifuge;
Ep := m g L (1 - cos(θ(t))) - 1/2 m L² omega_cercle² sin(θ(t))²

```

On introduit Omega0 (pulsation propre du point oscillant quand le cercle ne tourne pas).
On introduit aussi la variable réduite lambda=(omega_cercle/Omega0)^2.

```
> g:= L* Omega0^2;
```

$$g := L \Omega_0^2$$

```
> omega_cercle:=sqrt( lambda)*Omega0;
```

$$\omega_{cercle} := \sqrt{\lambda} \Omega_0$$

```
> Ep;
```

$$m L^2 \Omega_0^2 (1 - \cos(\theta(t))) - \frac{1}{2} m L^2 \lambda \Omega_0^2 \sin(\theta(t))^2$$

On trace E_p en fonction de θ pour $-\pi < \theta < \pi$.

Il faut que chaque paramètre possède une valeur numérique.

On trace en réalité $E_p/(m*L^2*Omega0^2)$: soit E_p réduit noté K .

On choisit les valeurs suivantes pour λ : 0, 1/2, 1, 2, 4.

```
> K:=simplify(Ep/(m*L^2*Omega0^2));
```

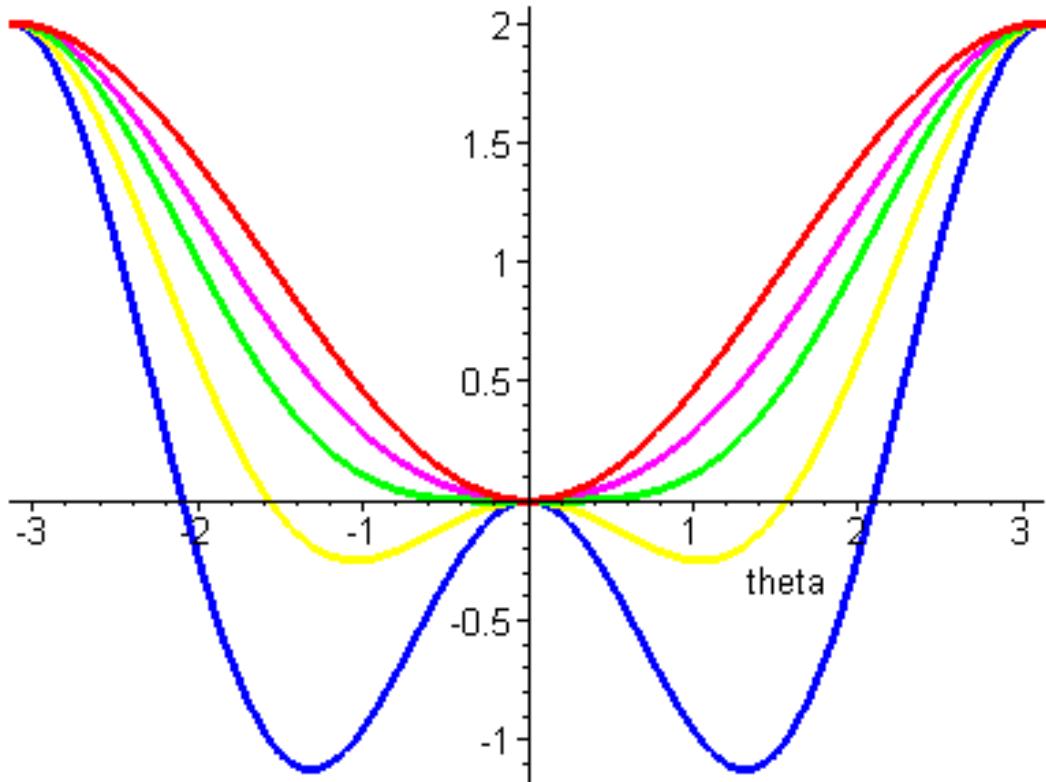
```
graphes:={seq(subs(lambda=i,K),i={0,1/2,1,2,4})};
```

```
plot(graphes,theta=-Pi..Pi,thickness=3);
```

$$K := 1 - \cos(\theta(t)) - \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2}\lambda \cos(\theta(t))^2$$

$$graphes := \{1 - \cos(\theta(t)), \frac{1}{2} - \cos(\theta(t)) + \frac{1}{2} \cos(\theta(t))^2, -\cos(\theta(t)) + \cos(\theta(t))^2,$$

$$-1 - \cos(\theta(t)) + 2 \cos(\theta(t))^2, \frac{3}{4} - \cos(\theta(t)) + \frac{1}{4} \cos(\theta(t))^2\}$$



Si lambda est inférieur ou égal à 1, la position d'équilibre stable est donc en theta=0.
L'autre position en theta=+ ou - Pi est instable.

Si lambda est supérieur à 1, la position d'équilibre theta=0 devient instable
mais il existe désormais deux positions d'équilibre stable symétriques (bistabilité)

Equations pour le tracé du portrait de phase

> restart;with(DEtools):

On écrit le système d'équations du premier ordre nécessaire ici à Maple pour la résolution:
les deux fonctions sont theta(t) et omega(t) pour la vitesse angulaire.
On utilise les notations Omega0 et lambda.

> deq1:=diff(theta(t),t)=omega(t) ;
deq2:=diff(omega(t),t)=Omega0^2*sin(theta(t))*(lambda*cos(theta(t))-1);
deq:= deq1,deq2;

$$deq1 := \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) = \omega(t)$$

$$deq2 := \frac{\partial}{\partial t} \omega(t) = \Omega_0^2 \sin(\theta(t)) (\lambda \cos(\theta(t)) - 1)$$

$$deq := \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) = \omega(t), \frac{\partial}{\partial t} \omega(t) = \Omega_0^2 \sin(\theta(t)) (\lambda \cos(\theta(t)) - 1)$$

On introduit des valeurs numériques (Omega0,T0=1).
Omega0 est la pulsation propre de la masse quand le cerceau ne tourne pas.

> Omega0:=2*Pi/T0; T0:=1;

$$\Omega_0 := 2 \frac{\pi}{T_0}$$

$$T_0 := 1$$

On introduit trois autres grandeurs (faire les démonstrations):

1)omega(rev): la vitesse angulaire avec laquelle il faut lancer le point matériel du point le plus bas _□_ pour que son énergie soit suffisante pour atteindre le point le plus haut du cerceau lorsque le cerceau ne tourne pas.

2)theta0: les positions d'équilibre dans le cas de bistabilité sont en + ou - theta0.

3)omega(lim): la norme de la vitesse angulaire maximale à communiquer au point en partant d'une position d'équilibre stable
(dans le cas de bistabilité)
pour que celui-ci reste toujours dans la même "région"

```
> omega(rev):=2*Omega0;
omega(lim):=Omega0*(lambda-1)/sqrt(lambda);
theta0:=arccos(1/lambda);
```

$$\varpi(\text{rev}) := 4\pi$$

$$\varpi(\text{lim}) := 2 \frac{\pi(\lambda - 1)}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\theta_0 := \arccos\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

Portrait de phase dans le cas particulier lambda=2

**On trace des portraits de phase pour lambda=2 (bistabilité)
(on va travailler par morceaux qu'on collera par la suite en utilisant l'instruction: display).**

```
> lambda:=2;
λ := 2
```

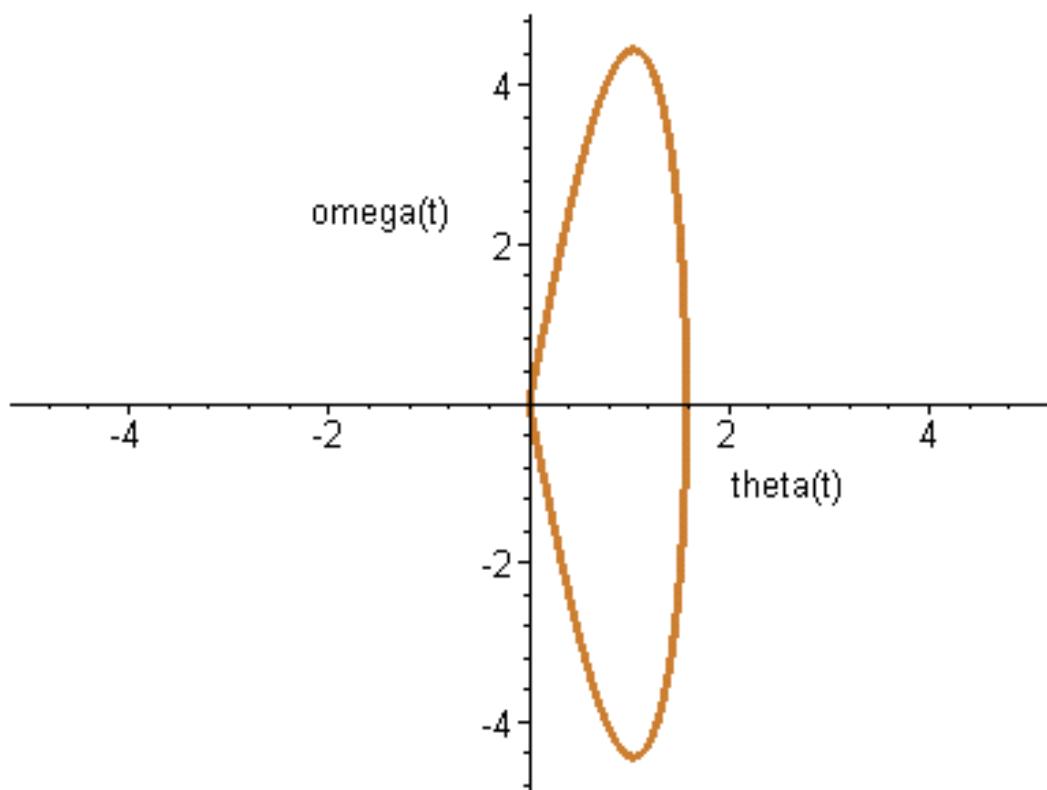
```
> deq;
 $\frac{\partial}{\partial t}\theta(t) = \varpi(t), \frac{\partial}{\partial t}\varpi(t) = 4\pi^2 \sin(\theta(t))(2\cos(\theta(t)) - 1)$ 
```

**Premiers tracés partiels: on stocke les graphes partiels un par un
en ce qui concerne les portraits de phase.**

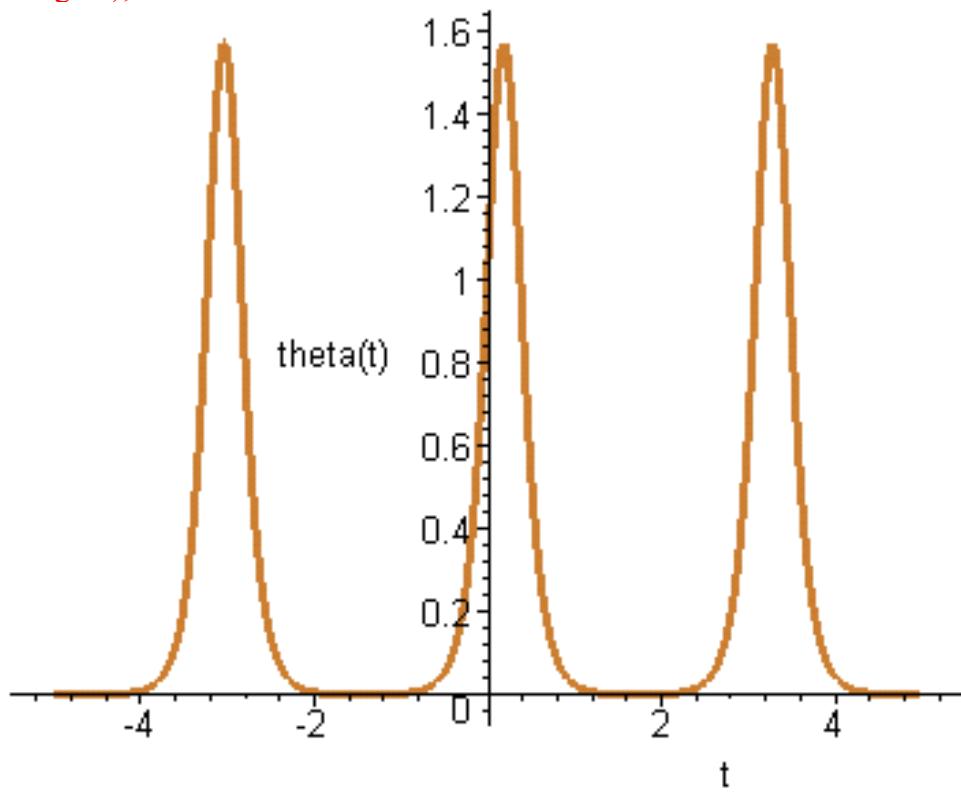
On trace aussi theta(t).

```
> cond_init1:=[theta(0)=theta0,omega(0)= omega(lim)];
cond_init1 := [θ(0) =  $\frac{1}{3}\pi$ , ϖ(0) =  $2 \frac{\pi(\lambda - 1)}{\sqrt{\lambda}}$ ]
```

```
> D1:=DEplot([deq],[theta(t),omega(t)],t=-10*T0..10*T0,[cond_init1],theta=-3*Pi/2..3*Pi/2,stepsize=T0/100,
scene=[theta(t),omega(t)],arrows=none,linecolor=gold);
D1;
```



```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=-5*T0..5*T0, [cond_init1], stepsize=T0/100, scene=[t,theta(t)], arrows=none, linecolor=gold);
```

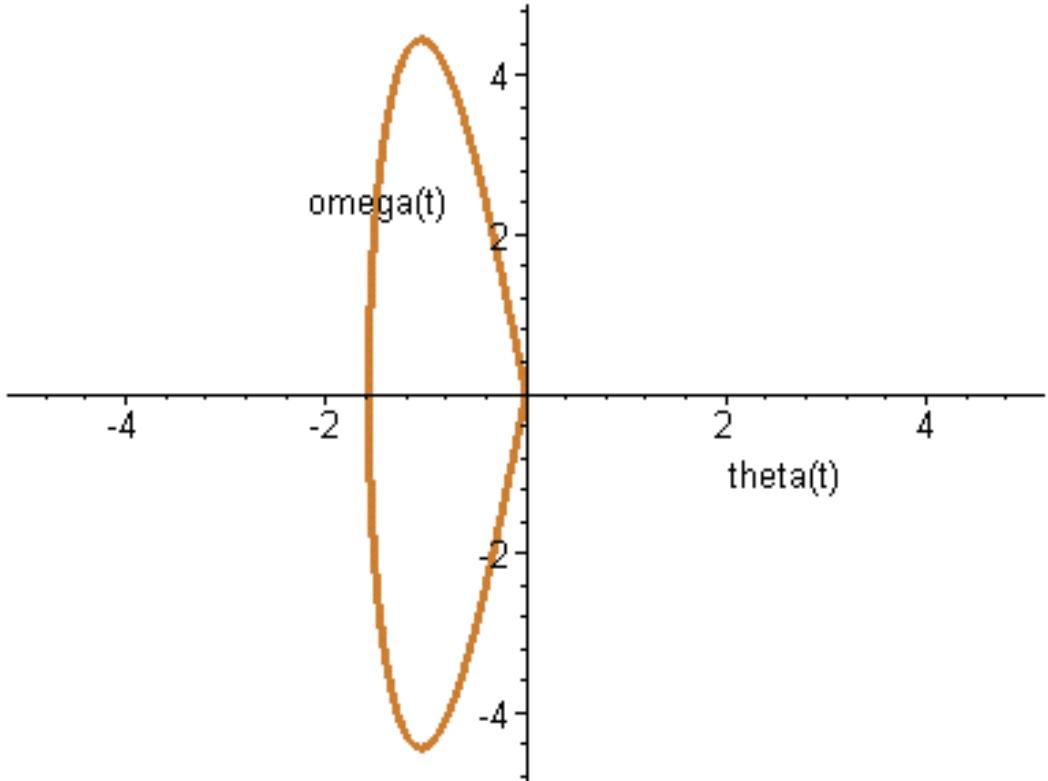


Pour la partie symétrique:

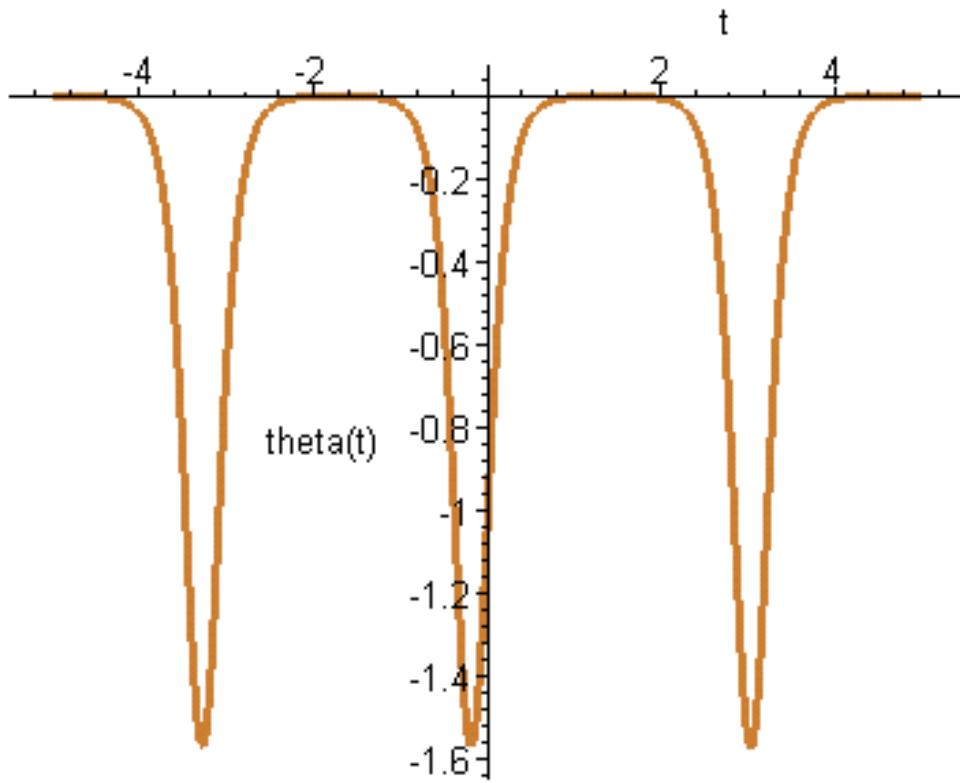
GP

```
> cond_init2:=[theta(0)=-theta0,omega(0)=omega(lim)];  
D2:=DEplot([deq],[theta(t),omega(t)],t=-10*T0..10*T0,[cond_init2],theta=-3*Pi/2..3*Pi/2,stepsize=T0/100,  
scene=[theta(t),omega(t)],arrows=none,linecolor=gold);  
D2;
```

$$cond_init2 := \left[\theta(0) = -\frac{1}{3}\pi, \omega(0) = 2 \frac{\pi(\lambda - 1)}{\sqrt{\lambda}} \right]$$

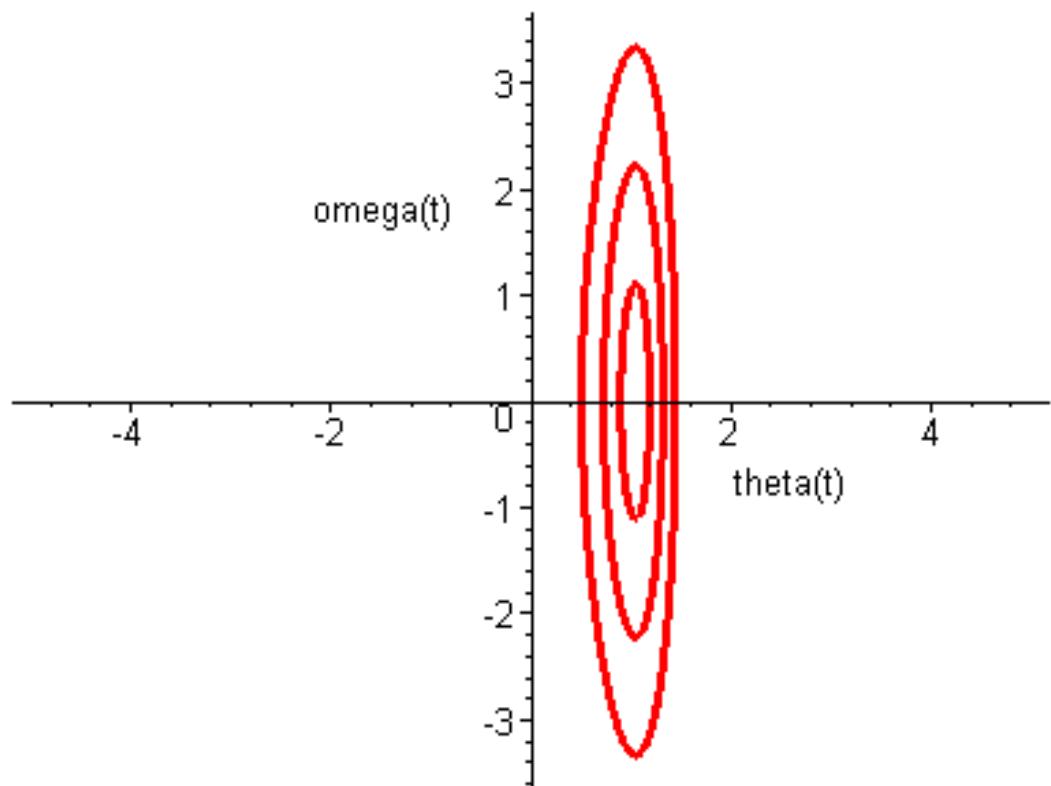


```
> DEplot([deq],[theta(t),omega(t)],t=-5*T0..5*T0,[cond_init2],stepsize=T0/100,scene=[t,theta(t)],  
arrows=none, linecolor=gold);
```

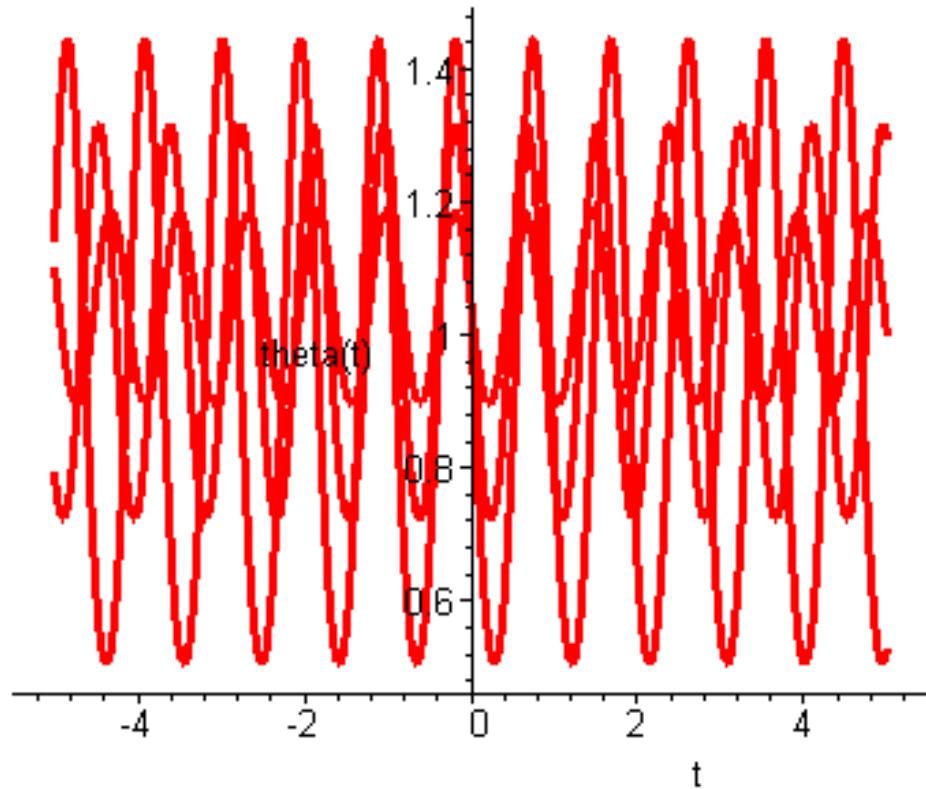


Suite des tracés partiels:

```
> cond_init3:=seq([theta(0)=theta0,omega(0)=-i*omega(lim)/4],i=1..3);
cond_init3 := [θ(0) =  $\frac{1}{3}\pi$ , ω(0) =  $-\frac{1}{2}\frac{\pi(\lambda - 1)}{\sqrt{\lambda}}$ ], [θ(0) =  $\frac{1}{3}\pi$ , ω(0) =  $-\frac{\pi(\lambda - 1)}{\sqrt{\lambda}}$ ],
[θ(0) =  $\frac{1}{3}\pi$ , ω(0) =  $-\frac{3}{2}\frac{\pi(\lambda - 1)}{\sqrt{\lambda}}$ ]
> D3:=DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t= -10*T0..10*T0, [cond_init3], theta=-3*Pi/2..3*Pi/2, stepsize=T0/100,
scene=[theta(t),omega(t)], arrows=none, linecolor=red);
D3;
```



```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t= -5*T0..5*T0, [cond_init3], stepsize=T0/100, scene=[t,theta(t)], arrows=none, linecolor=red);
```



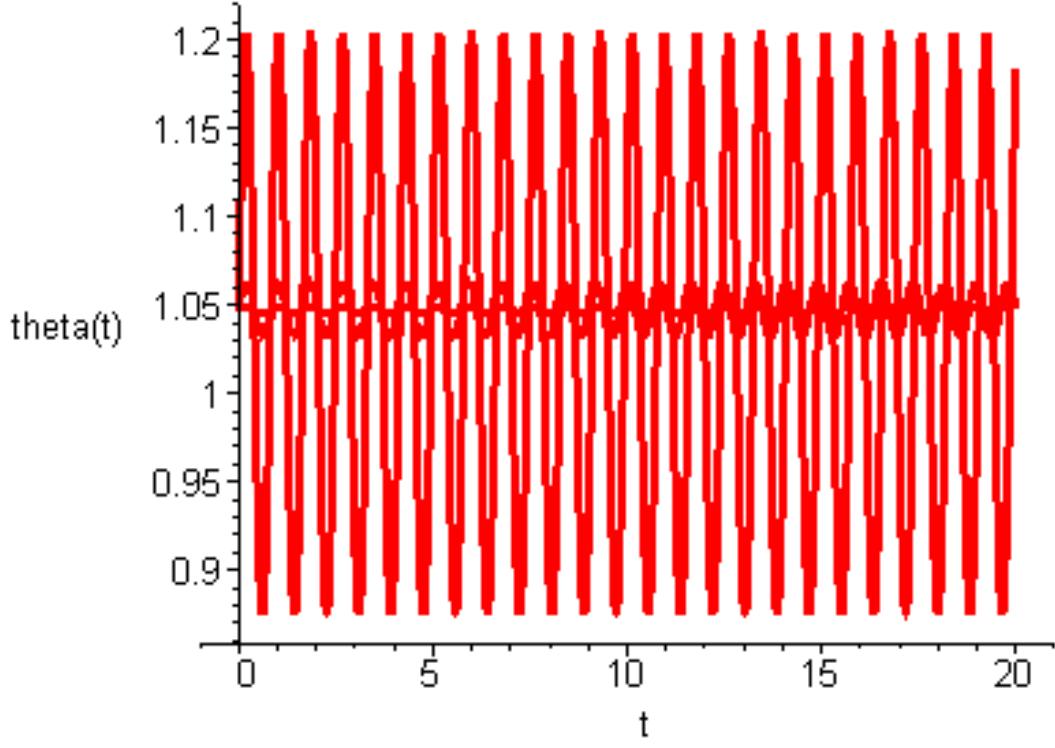
**Il s'agit de mouvement oscillatoire autour de la position d'équilibre stable.
Pour $\omega(0)$ "petit", le mouvement est quasi sinusoïdal.**

On trace les oscillations au voisinage d'une position d'équilibre pour vérifier l'isochronisme.

(on communique une vitesse $\omega_{\text{rev}}/1000$ idem avec $\omega_{\text{rev}}/100$ et $\omega_{\text{rev}}/10$ entre $t=0$ et $3T_0$.

```
> cond_init:=seq([theta(0)=theta0,omega(0)=omega(rev)/10^i],i=1..3);
DEplot([deq],[theta(t),omega(t)],t=0..20*T0,[cond_init],stepsize=T0/100,scene=[t,theta(t)],
arrows=none,linecolor=red);
cond_init :=
```

$$\left[\theta(0) = \frac{1}{3}\pi, \omega(0) = \frac{2}{5}\pi \right], \left[\theta(0) = \frac{1}{3}\pi, \omega(0) = \frac{1}{25}\pi \right], \left[\theta(0) = \frac{1}{3}\pi, \omega(0) = \frac{1}{250}\pi \right]$$



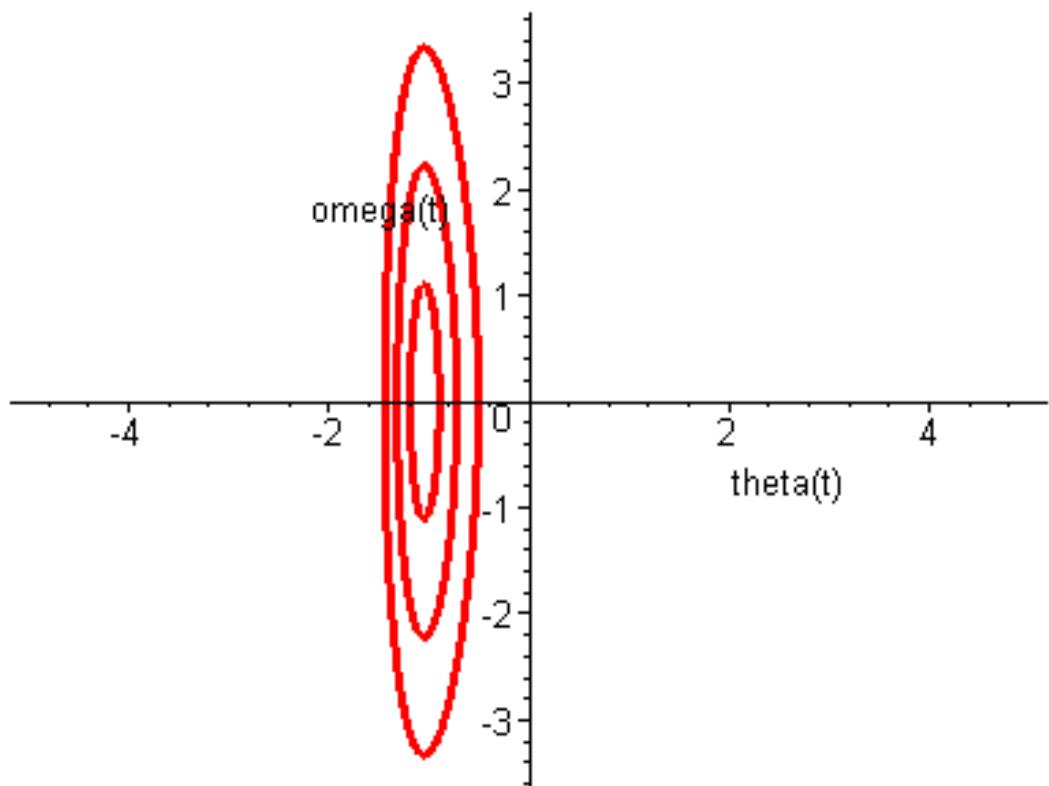
Pour la partie symétrique:

```
> cond_init4:=seq([theta(0)=-theta0,omega(0)=-i*omega(lim)/4],i=1..3);
```

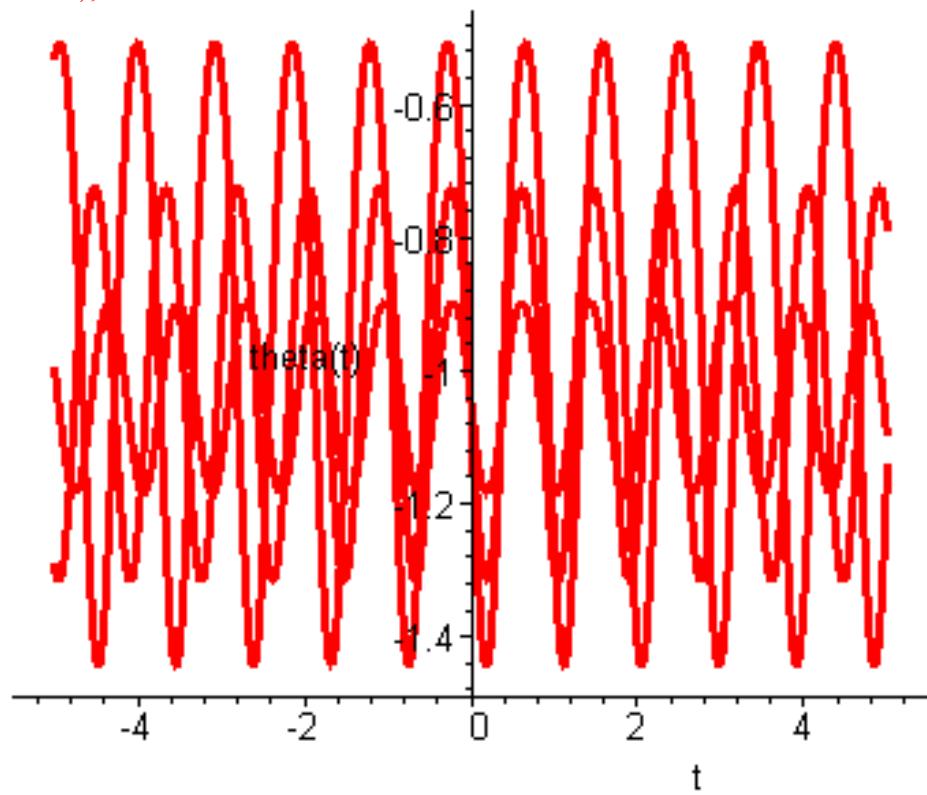
$$\begin{aligned} \text{cond_init4} := & \left[\theta(0) = -\frac{1}{3}\pi, \omega(0) = -\frac{1}{2}\frac{\pi(\lambda-1)}{\sqrt{\lambda}} \right], \\ & \left[\theta(0) = -\frac{1}{3}\pi, \omega(0) = -\frac{\pi(\lambda-1)}{\sqrt{\lambda}} \right], \left[\theta(0) = -\frac{1}{3}\pi, \omega(0) = -\frac{3}{2}\frac{\pi(\lambda-1)}{\sqrt{\lambda}} \right] \end{aligned}$$

```
> D4:=DEplot([deq],[theta(t),omega(t)],t=-10*T0..10*T0,[cond_init4],theta=-3*Pi/2..3*Pi/2,stepsize=T0/100,
scene=[theta(t),omega(t)],arrows=none,linecolor=red);
```

D4;



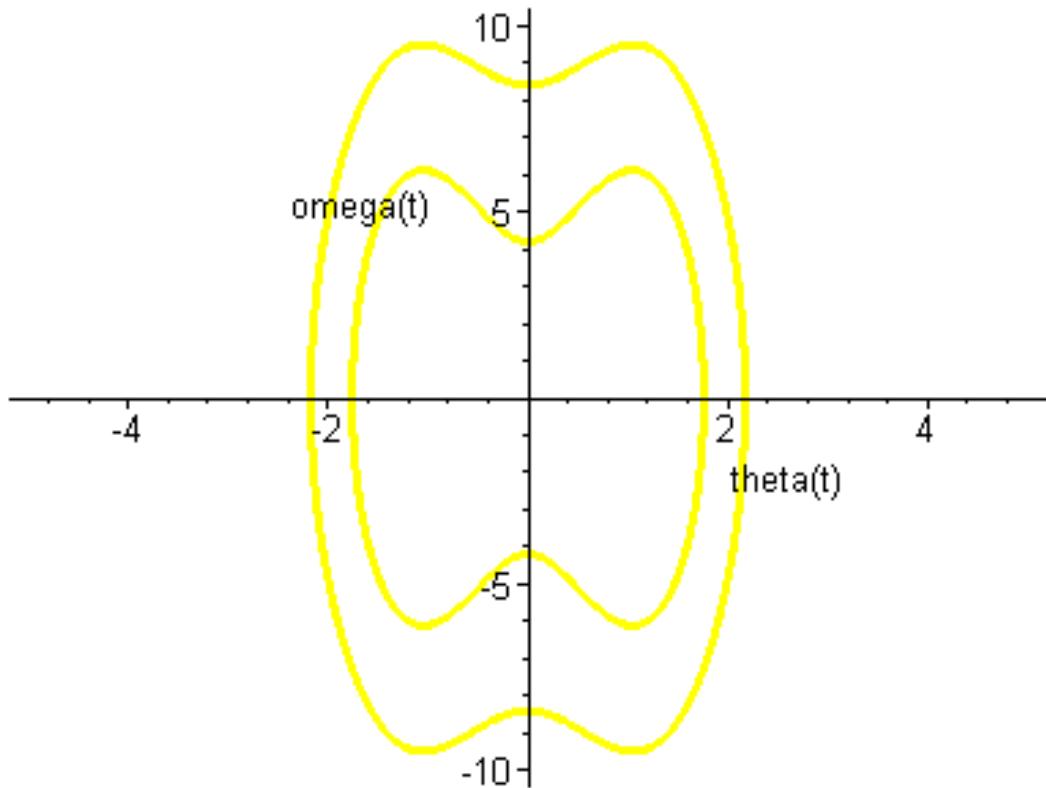
```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t= -5*T0..5*T0, [cond_init4], stepsize=T0/100, scene=[t,theta(t)], arrows=none, linecolor=red);
```



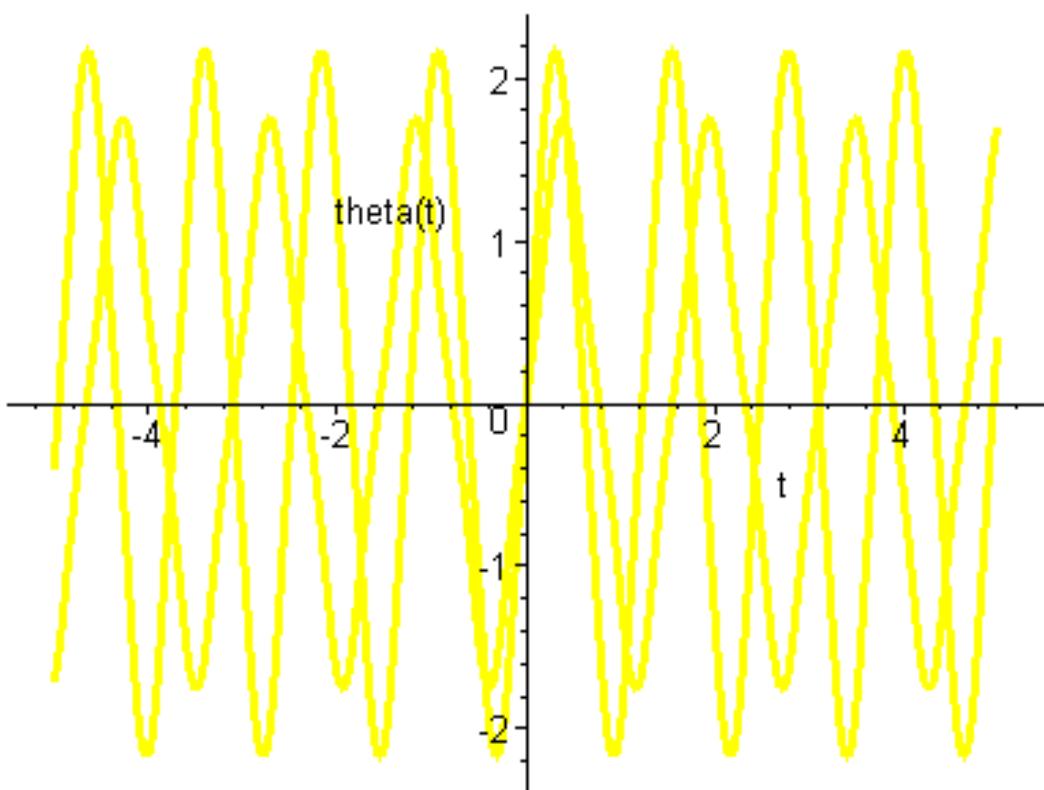
Suite des tracés partiels

GP

```
> cond_init5:=seq([theta(0)=0,omega(0)=i*omega(rev)/3],i={1,2});  
cond_init5 :=  $\left[ \theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{4}{3}\pi \right], \left[ \theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{8}{3}\pi \right]$   
> D5:=DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=-10*T0..10*T0, [cond_init5], theta=-3*Pi/2..3*Pi/2, stepsize=T0/100,  
scene=[theta(t),omega(t)], arrows=none, linecolor=yellow);  
D5;
```

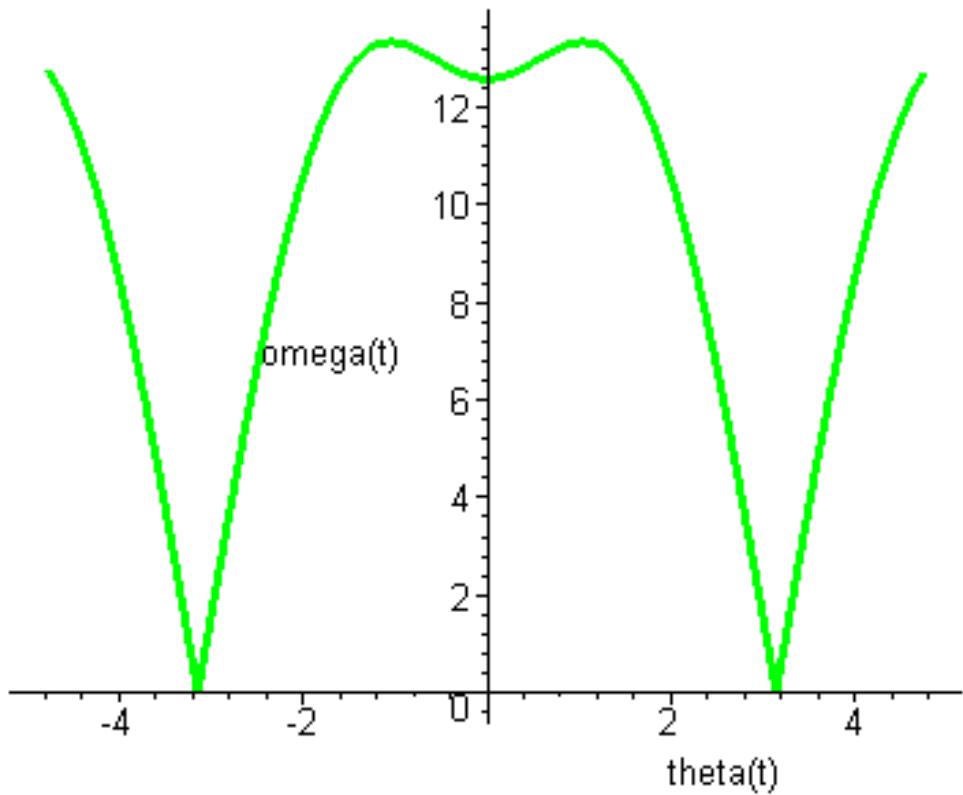


```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=-5*T0..5*T0, [cond_init5], stepsize=T0/100, scene=[t,theta(t)],  
arrows=none, linecolor=yellow);
```



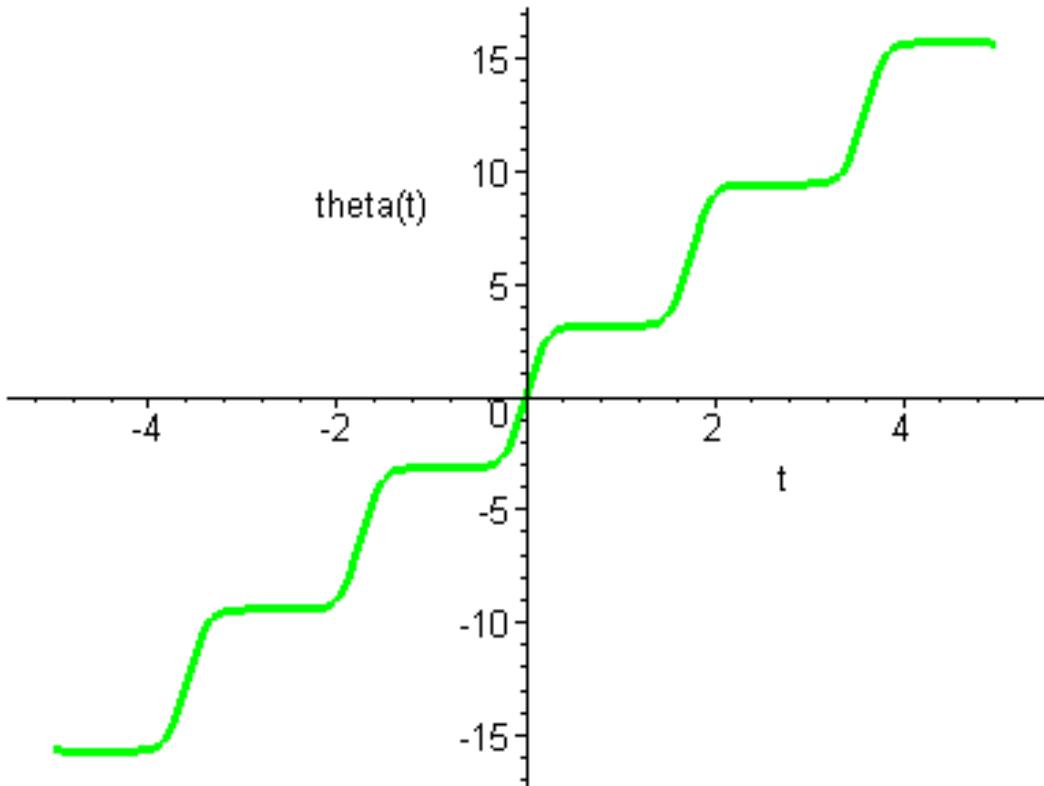
```
> cond_init6:=[theta(0)=0,omega(0)=omega(rev)];
cond_init6 := [θ (0) = 0, ω (0) = 4 π ]
```

```
> D6:=DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=-10*T0..10*T0, [cond_init6], theta=-3*Pi/2..3*Pi/2, stepsize=T0/100,
scene=[theta(t),omega(t)], arrows=none, linecolor=green);
D6;
```



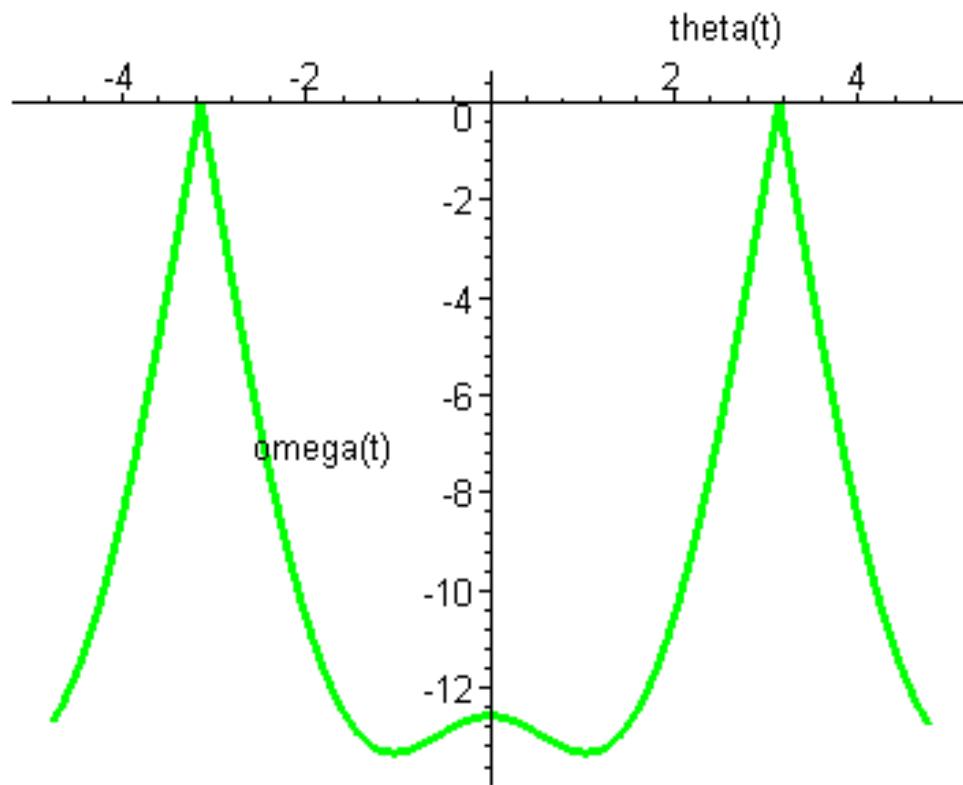
GP

```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=-5*T0..5*T0, [cond_init6], stepsize=T0/100, scene=[t,theta(t)], arrows=none, linecolor=green);
```

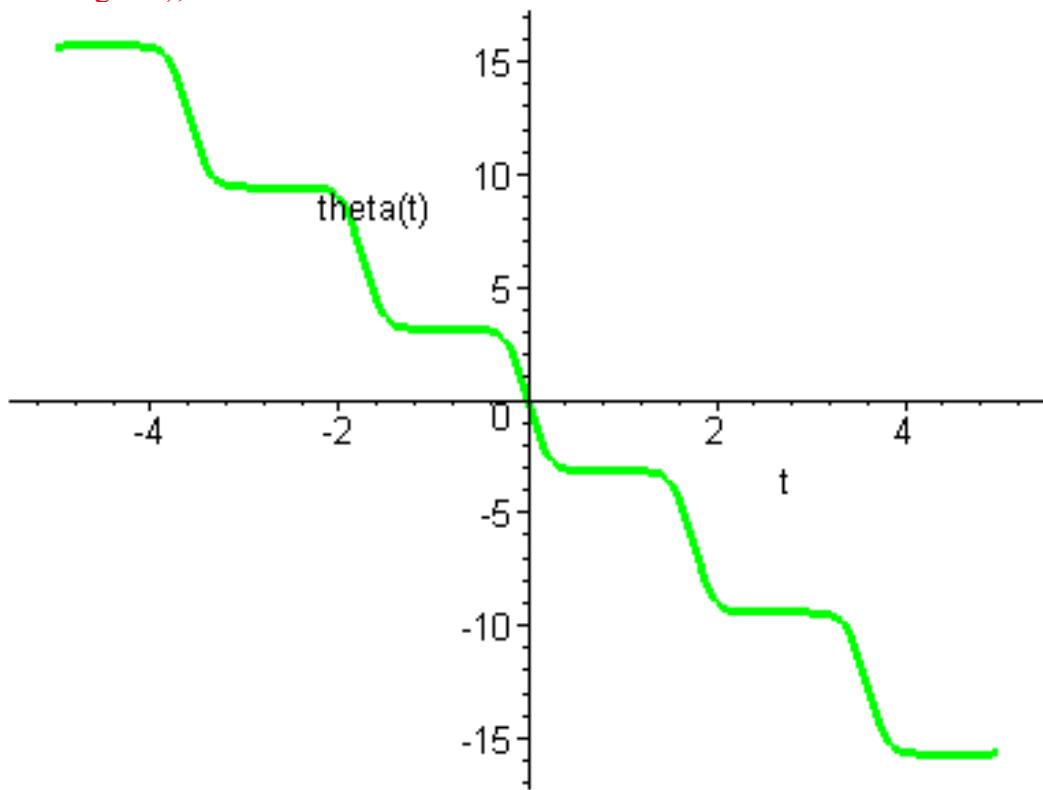


```
> cond_init7:=[theta(0)=0,omega(0)=-omega(rev)];  
cond_init7 := [θ(0) = 0, ω(0) = -4 π ]
```

```
> D7:=DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=-10*T0..10*T0, [cond_init7], theta=-3*Pi/2..3*Pi/2, stepsize=T0/100,  
scene=[theta(t),omega(t)], arrows=none, linecolor=green):  
D7;
```



```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=-5*T0..5*T0, [cond_init7], stepsize=T0/100, scene=[t,theta(t)], arrows=none, linecolor=green);
```



Pour les conditions initiales 5, le point oscille mais change de région.

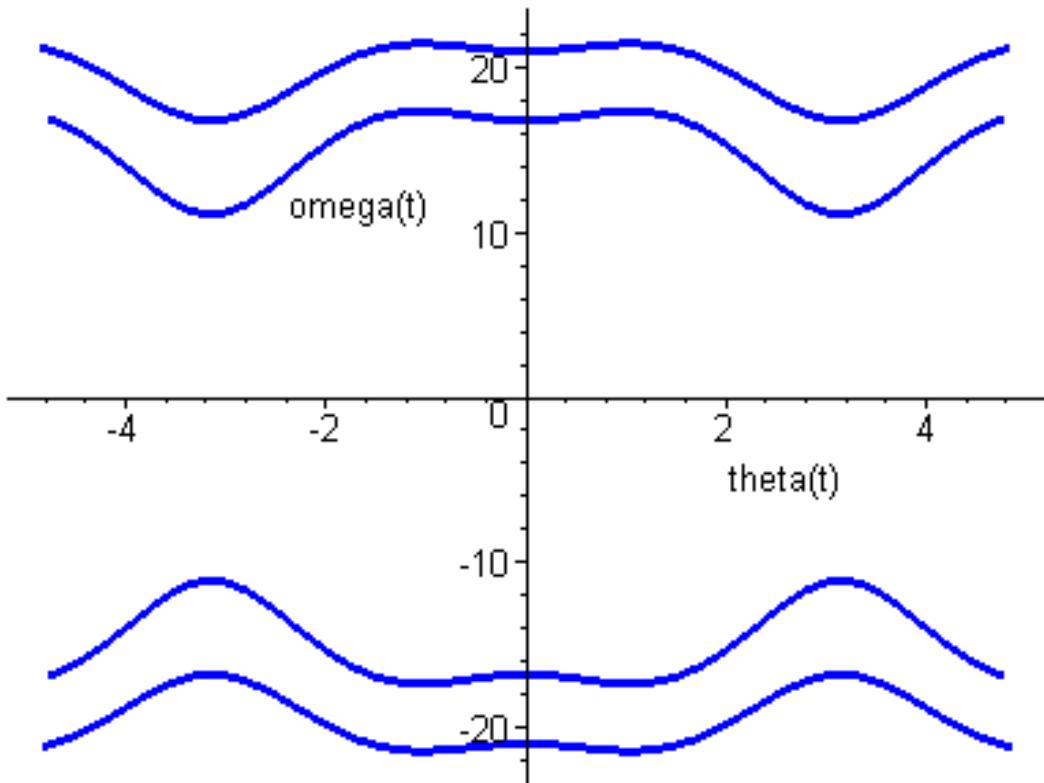
Pour 6 et 7, il s'agit de la séparatrice séparant mouvement oscillatoire et mouvement révolutif.

Pour la valeur numérique choisie pour lambda, la valeur numérique de omega(0) (avec theta(0)=0), est la même que celle de omega(rev) introduite plus haut.

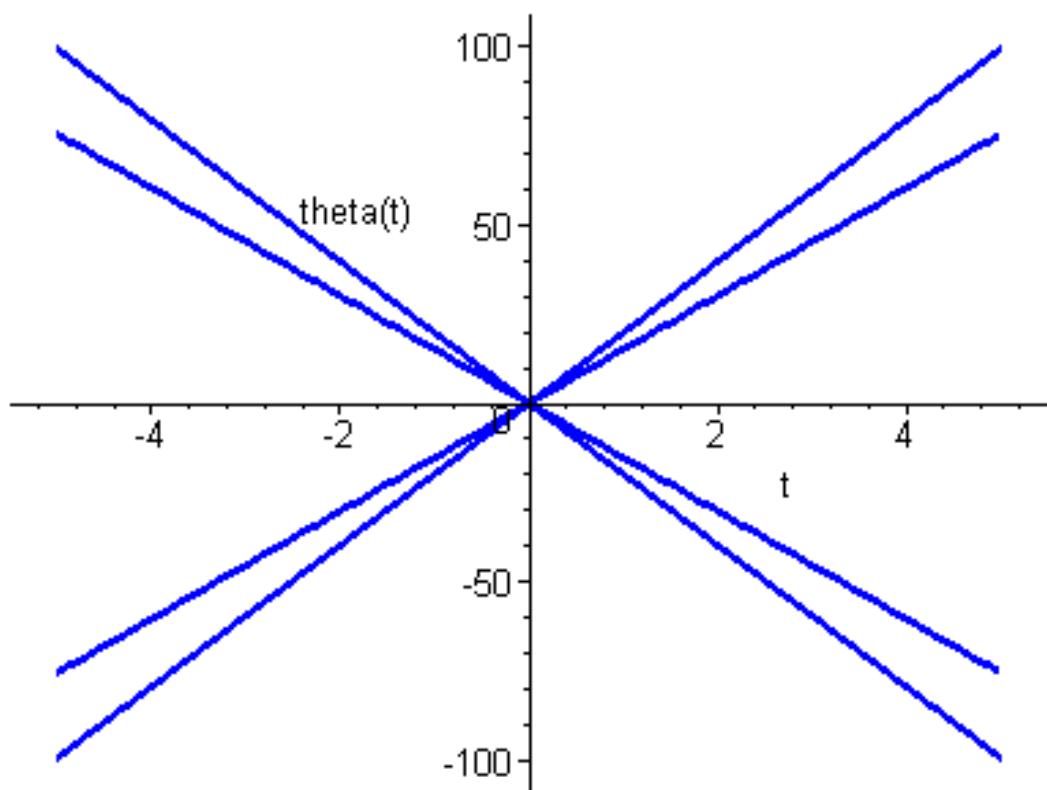
On trace enfin des mouvements révolutifs.

```
> cond_init8:=seq([theta(0)=0,omega(0)=i*omega(rev)/3],i={-5,-4,4,5});
cond_init8 := [θ(0) = 0, ω(0) = - $\frac{20}{3}\pi$ ], [θ(0) = 0, ω(0) = - $\frac{16}{3}\pi$ ],
[θ(0) = 0, ω(0) =  $\frac{16}{3}\pi$ ], [θ(0) = 0, ω(0) =  $\frac{20}{3}\pi$ ]
```

```
> D8:=DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=-10*T0..10*T0, [cond_init8], theta=-3*Pi/2..3*Pi/2, stepsize=T0/100,
scene=[theta(t),omega(t)], arrows=none, linecolor=blue):
D8;
```

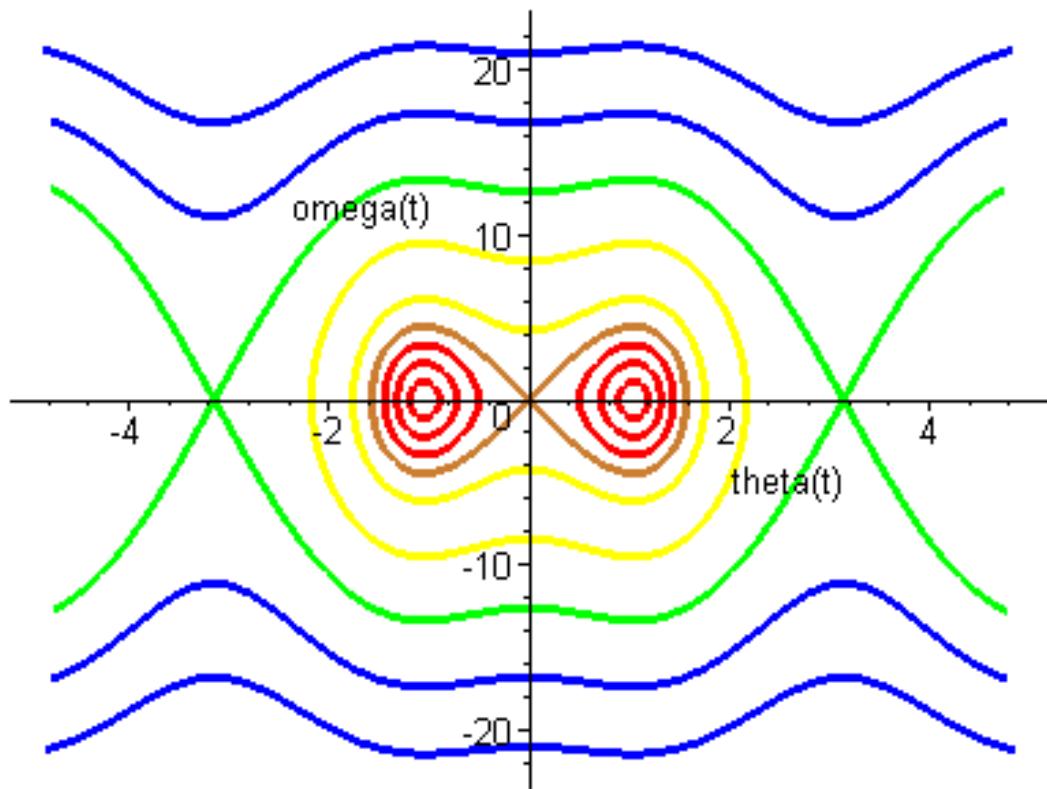


```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=-5*T0..5*T0, [cond_init8], stepsize=T0/100, scene=[t,theta(t)],
arrows=none, linecolor=blue);
```



On trace le portrait de phase complet pour $\lambda=2$

```
> with(plots): display([D1,D2,D3,D4,D5,D6,D7,D8]);
Warning, the name changecoords has been redefined
```



Portrait de phase dans le cas particulier lambda=1/2

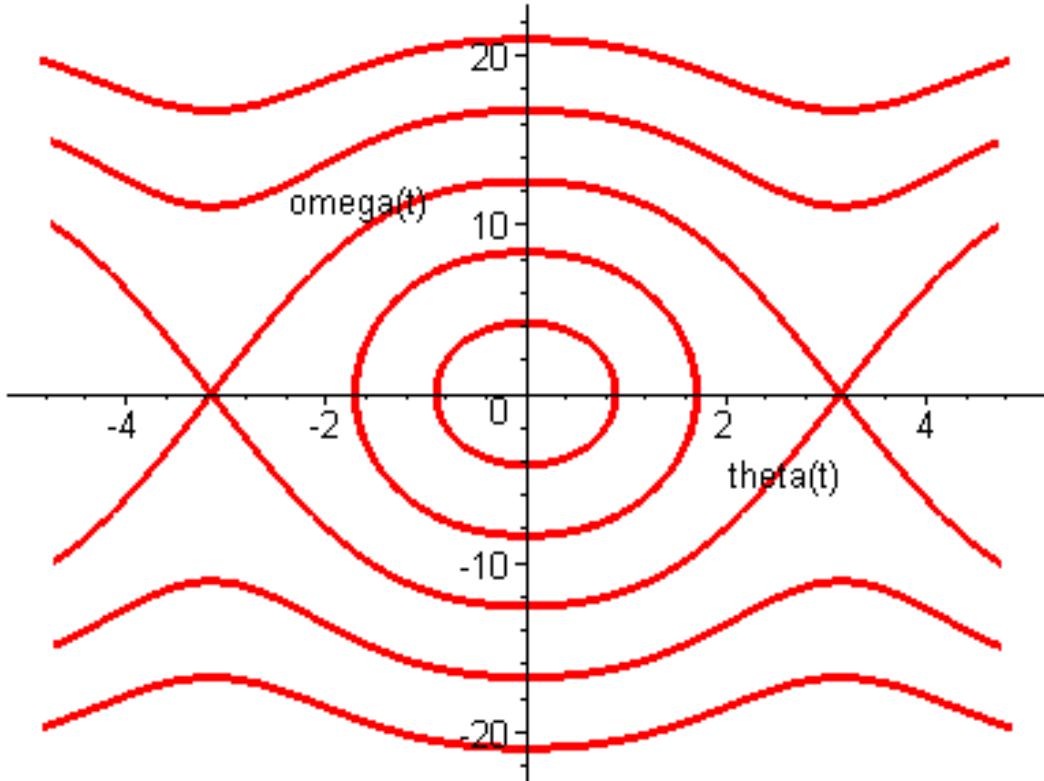
Pour lambda = 1/2, le portrait de phase est proche du portrait de phase pour un pendule simple (rotation du cerceau faible)

```
> lambda:=1/2;
cond_init:=seq([theta(0)=0,omega(0)=i*omega(rev)/3],i=-5..5);
DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=-10*T0..10*T0, [cond_init], theta=-3*Pi/2..3*Pi/2, stepsize=T0/100,
scene=[theta(t),omega(t)], arrows=none, linecolor=red);
```

$$\lambda := \frac{1}{2}$$

cond_init := $\left[\theta(0) = 0, \omega(0) = -\frac{20}{3}\pi \right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = -\frac{16}{3}\pi \right],$
 $\left[\theta(0) = 0, \omega(0) = -4\pi \right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = -\frac{8}{3}\pi \right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = -\frac{4}{3}\pi \right],$

$\left[\theta(0) = 0, \omega(0) = 0 \right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{4}{3}\pi \right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{8}{3}\pi \right],$
 $\left[\theta(0) = 0, \omega(0) = 4\pi \right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{16}{3}\pi \right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{20}{3}\pi \right]$



Portrait de phase dans le cas limite lambda=1

```
> lambda:=1;
lambda := 1
```

Aucune difficulté ici: cf on peut obtenir le diagramme complet en imaginant des lancements depuis la position d'équilibre stable (point B).

```
> cond_init:=seq([theta(0)=0,omega(0)=i*omega(rev)/3],i=-5..5);
```

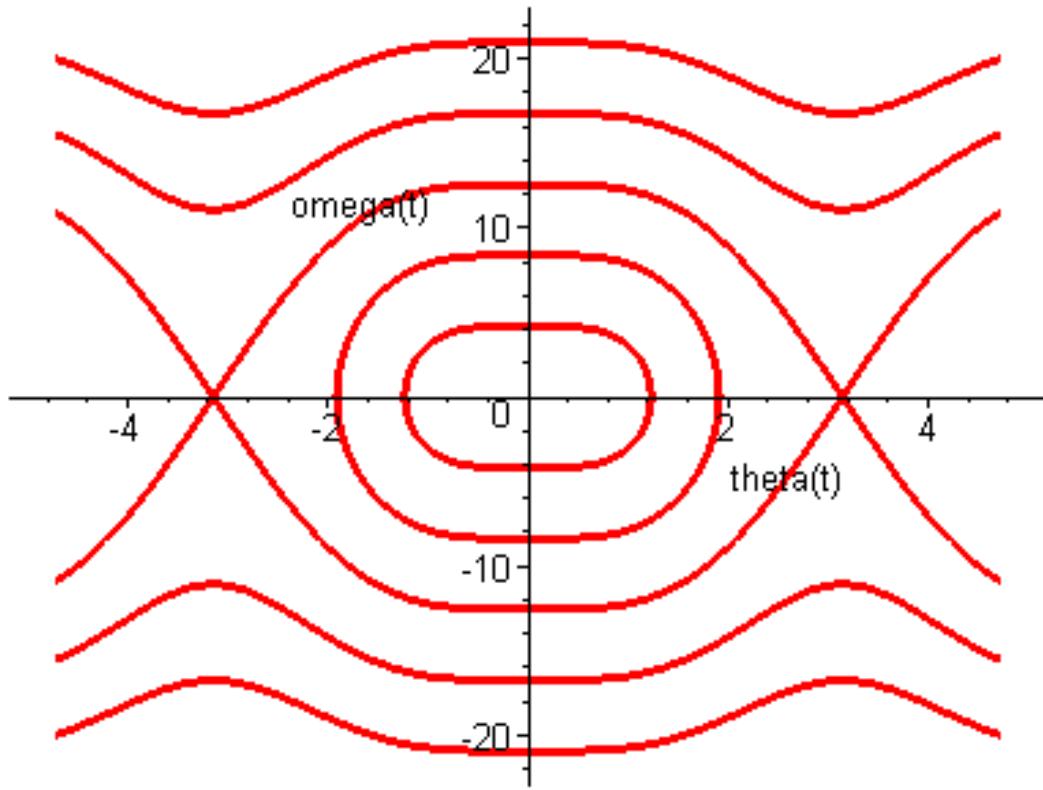
```
DDEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=-10*T0..10*T0, [cond_init], theta=-3*Pi/2..3*Pi/2, stepsize=T0/100, scene=[theta(t),omega(t)], arrows=none, linecolor=red);
```

$$\text{cond_init} := \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = -\frac{20}{3}\pi \right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = -\frac{16}{3}\pi \right],$$

$$\left[\theta(0) = 0, \omega(0) = -4\pi \right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = -\frac{8}{3}\pi \right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = -\frac{4}{3}\pi \right],$$

$$\left[\theta(0) = 0, \omega(0) = 0 \right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{4}{3}\pi \right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{8}{3}\pi \right],$$

$$\left[\theta(0) = 0, \omega(0) = 4\pi \right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{16}{3}\pi \right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{20}{3}\pi \right]$$



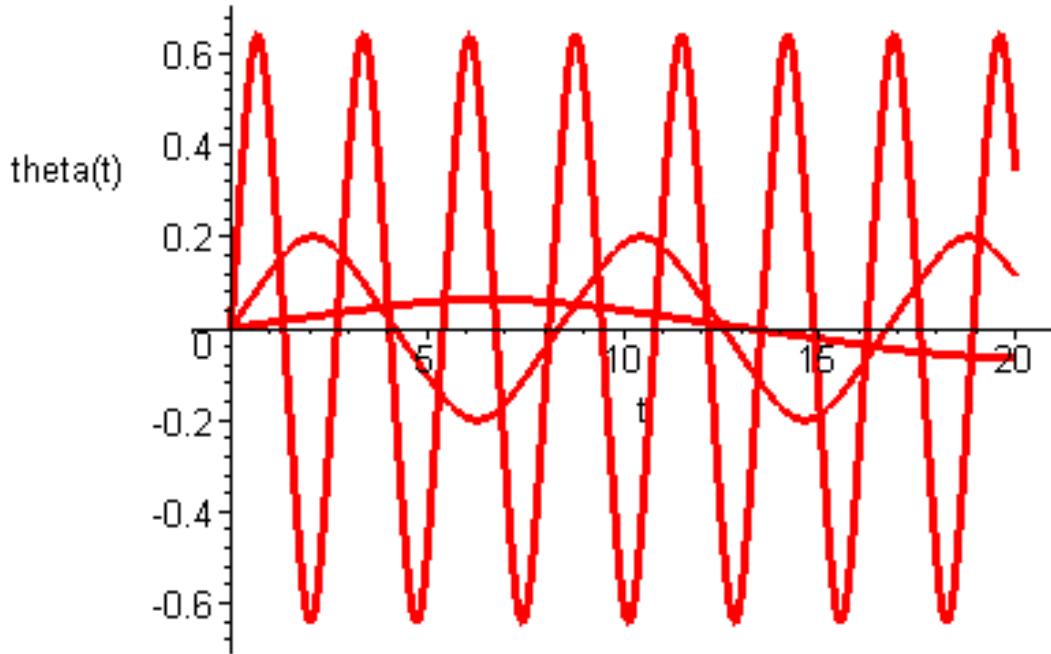
On trace les oscillations au voisinage de la position d'équilibre pour les 3 vitesses de lancement:
 omega(rev)/1000 , omega(rev)/100 , omega(rev)/10 .

```
> cond_init:=seq([theta(0)=0,omega(0)=omega(rev)/10^i],i=1..3);
```

```
DDEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=0..20*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[t,theta(t)], arrows=none, linecolor=red);
```

cond_init :=

$$\left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{2}{5}\pi \right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{1}{25}\pi \right], \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{1}{250}\pi \right]$$



Il n'y a plus ici d'isochronisme pour les petites oscillations.

L'équation du mouvement dans le cas des petites oscillations ne redonne pas l'équation différentielle "classique" du second ordre correspondant au mouvement harmonique.

Prolongement chaos

Modifications des équations

On modifie le système d'équations

- pour tenir compte de frottements supposés visqueux, on introduire un terme en $\gamma * \omega(t)$

- supposer que le cerceau ne tourne plus à vitesse constante ω_{cercle} mais oscille avec une pulsation notée Ω :

ceci revient donc (car la force centrifuge est quadratique) à remplacer λ par $\lambda_0 * \sin(\Omega * t)^2$.

De plus on posera $\Omega := \alpha * \Omega_0$.

```
> restart;with(DEtools):unprotect(gamma);
> lambda:=lambda0*(sin(alpha*Omega0*t)^2);
deq1:=diff(theta(t),t)=omega(t);
```

```
deq2:=diff(omega(t),t)=Omega0^2 *sin(theta(t)) *(lambda*cos(theta(t))-1) - gamma*omega(t);
deq:= deq1,deq2:
```

$$\lambda := \lambda_0 \sin(\alpha \Omega_0 t)^2$$

$$deq1 := \frac{\partial}{\partial t} \theta(t) = \omega(t)$$

$$deq2 := \frac{\partial}{\partial t} \omega(t) = \Omega_0 \dot{\theta} \sin(\theta(t)) (\lambda_0 \sin(\alpha \Omega_0 t)^2 \cos(\theta(t)) - 1) - \gamma \omega(t)$$

```
> Omega0:=2*Pi/T0; T0:=1;omega(rev):=2*Omega0:deq;
 $\frac{\partial}{\partial t} \theta(t) = \omega(t), \frac{\partial}{\partial t} \omega(t) = 4 \pi^2 \sin(\theta(t)) (\lambda_0 \sin(2 \alpha \pi t)^2 \cos(\theta(t)) - 1) - \gamma \omega(t)$ 
```

Résonance paramétrique

Le problème abordé est celui de la résonance paramétrique: le paramètre de theta (ici sin(theta) et sin(theta)*cos(theta)...) dépend du temps.

```
> cond_init:=[theta(0)=0,omega(0)=omega(rev)/1000];
```

$$cond_init := \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{1}{250} \pi \right]$$

Exemple 1: résonance paramétrique

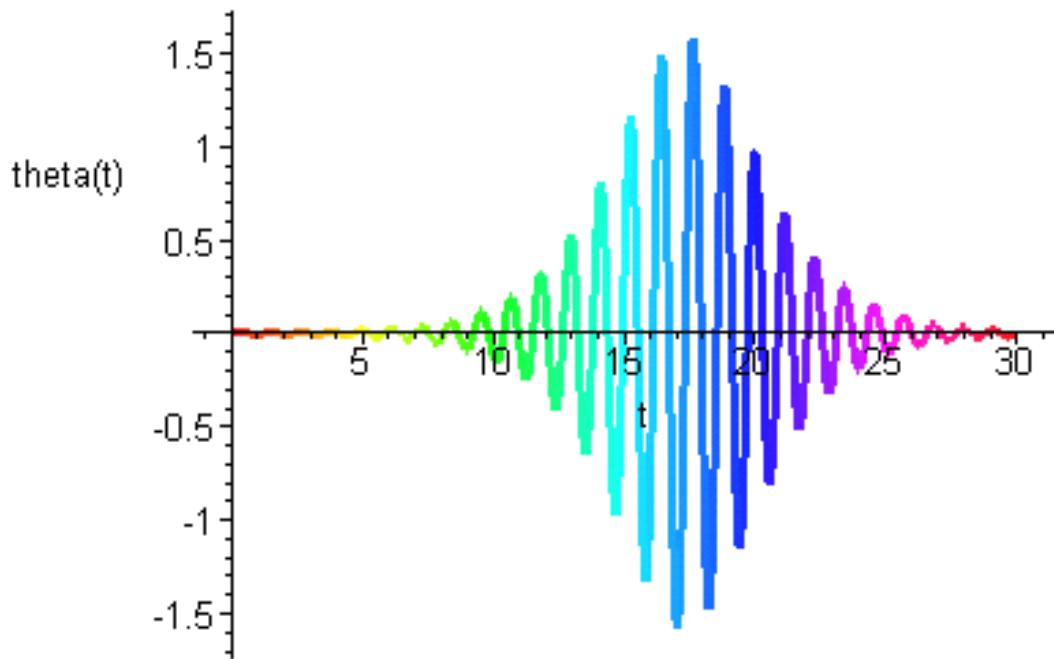
Pas de frottements (gamma=0), excitation faible (lambda0=0.5), alpha choisi à 0.88 pour obtenir une bonne résonance paramétrique.

```
> alpha:=0.88:#fréquence du cerceau
lambda0:=0.5:#vitesse du cerceau
gamma:=0:#frottement
> DEplot([deq], [theta(t),omega(t)], t=0..30*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[t,theta(t)],
arrows=none, linecolor=t);
```

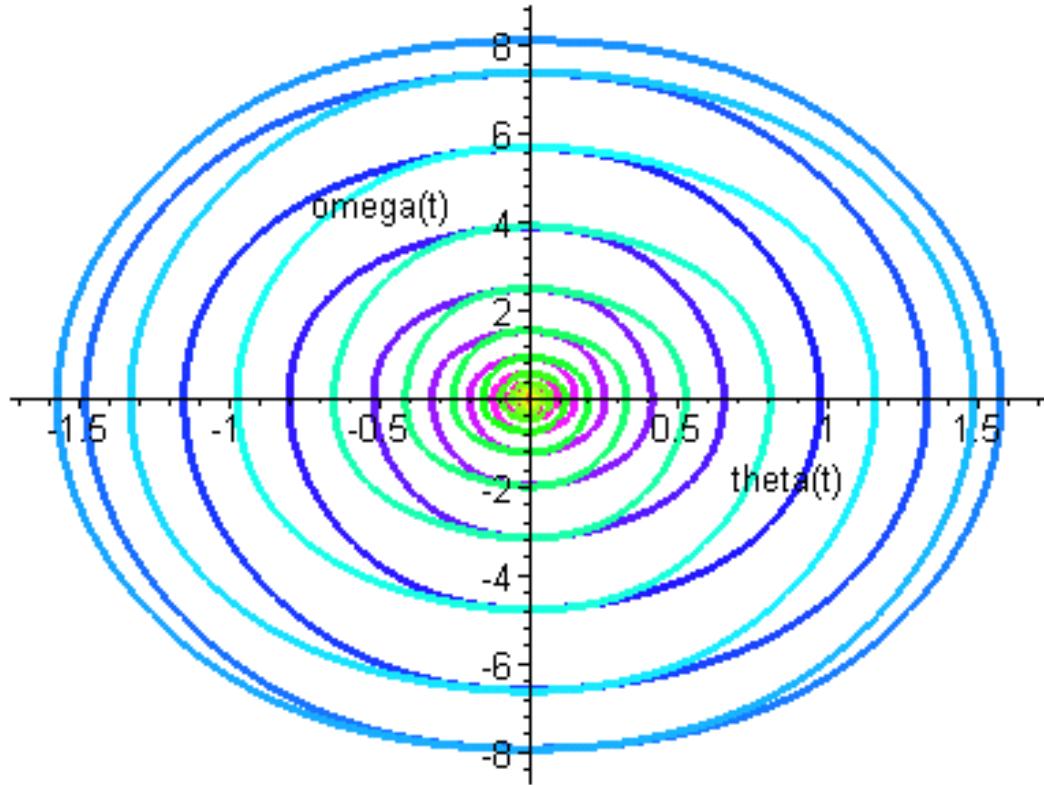
$$\alpha := .88$$

$$\lambda_0 := .5$$

$$\gamma := 0$$



```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=0..30*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[theta(t),omega(t)], arrows=none, linecolor=t);
```



Exemple 2: approche du chaos

Pas de frottements ($\gamma=0$), excitation plus forte ($\lambda_0=1.5$), $\alpha:=1$.

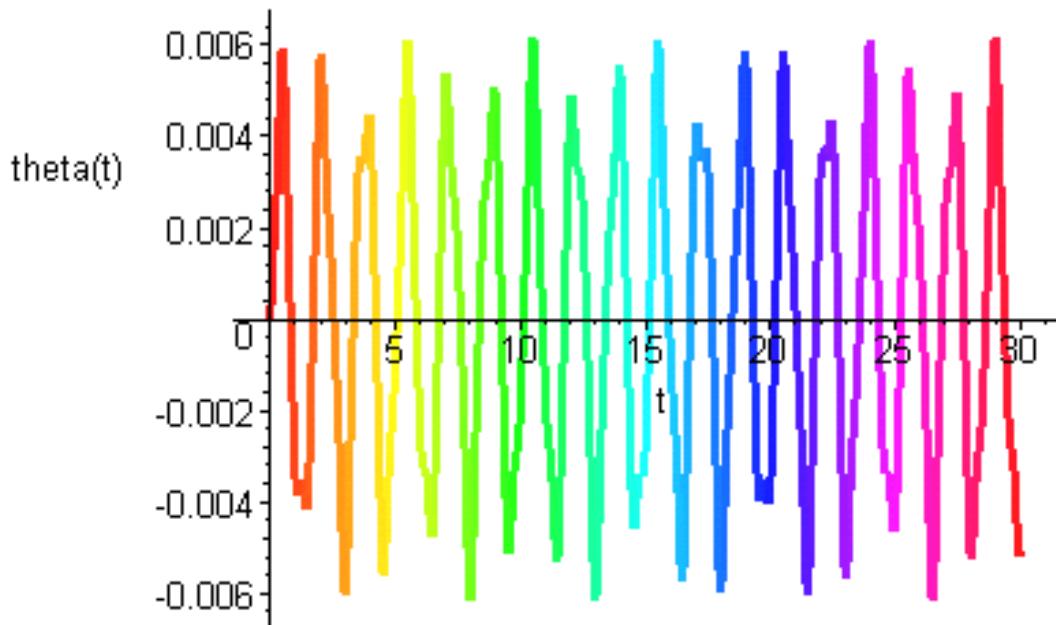
```
> alpha:=1;#fréquence du cerveau
lambda0:=1.5;#vitesse du cerveau
gamma:=0;#frottement
```

$$\alpha := 1$$

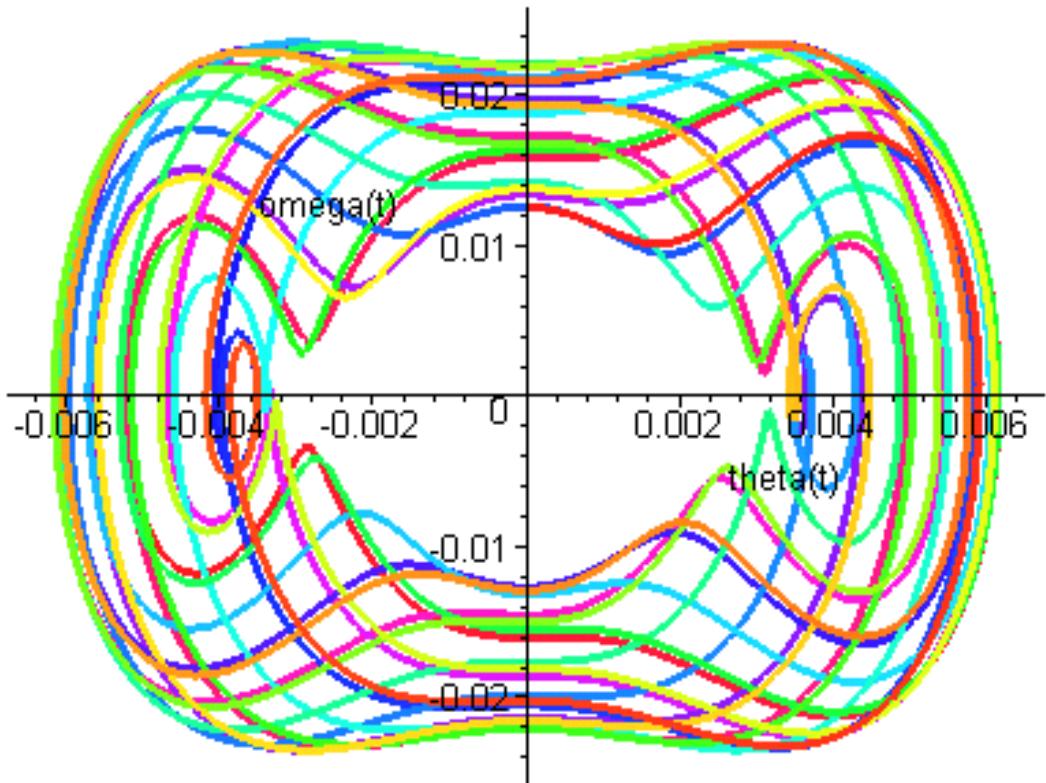
$$\lambda_0 := 1.5$$

$$\gamma := 0$$

```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=0..30*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[t,theta(t)],
arrows=none,linecolor=t);
```



```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=0..30*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[theta(t),omega(t)],
arrows=none,linecolor=t);
```



Exemple 3 : Chaos

Pas de frottements (gamma=0), excitation forte (lambda0=4), alpha:=1.

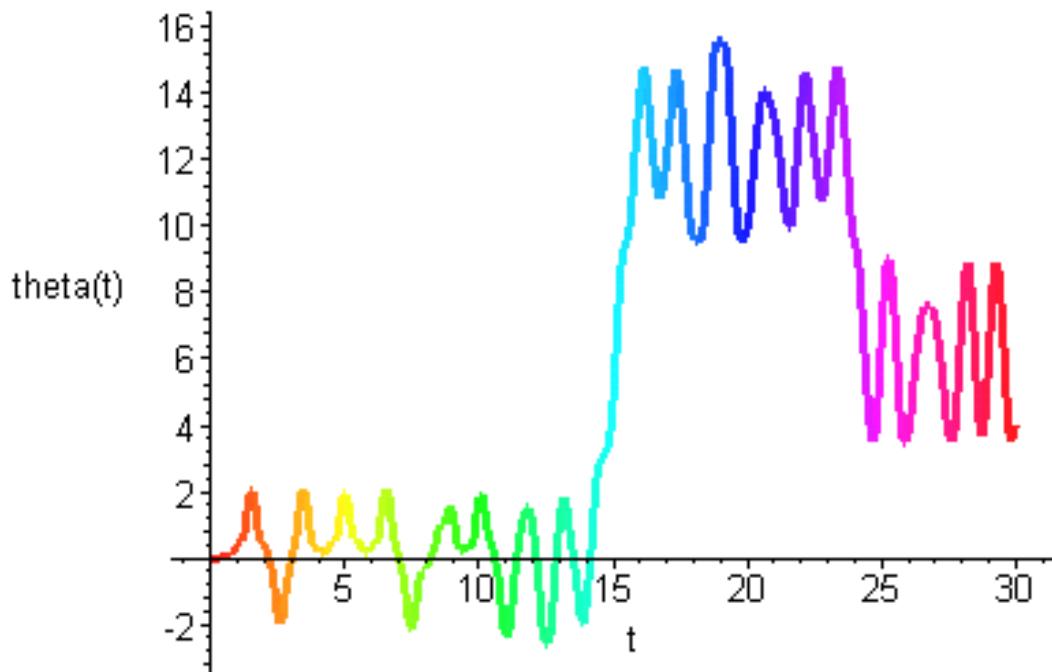
```
> alpha:=1;#fréquence du cerceau
lambda0:=4;#vitesse du cerceau
gamma:=0;#frottement
```

$$\alpha := 1$$

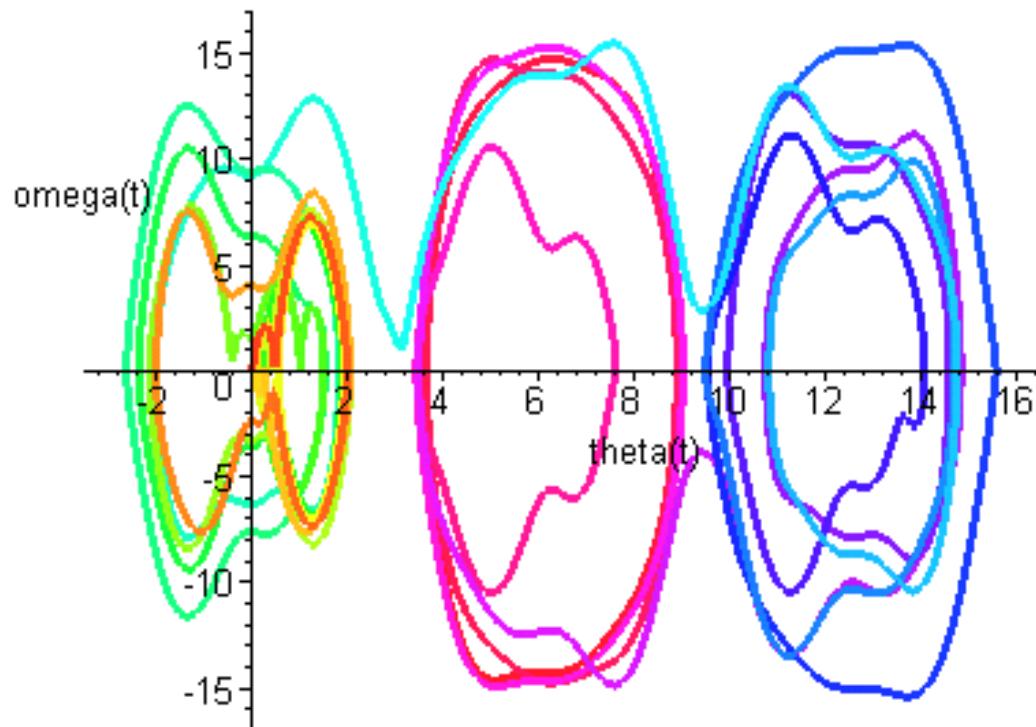
$$\lambda_0 := 4$$

$$\gamma := 0$$

```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=0..30*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[t,theta(t)],
arrows=none, linecolor=t);
```



```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=0..30*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[theta(t),omega(t)], arrows=none, linecolor=t);
```



Exemple 4 : Sensibilité aux conditions initiales

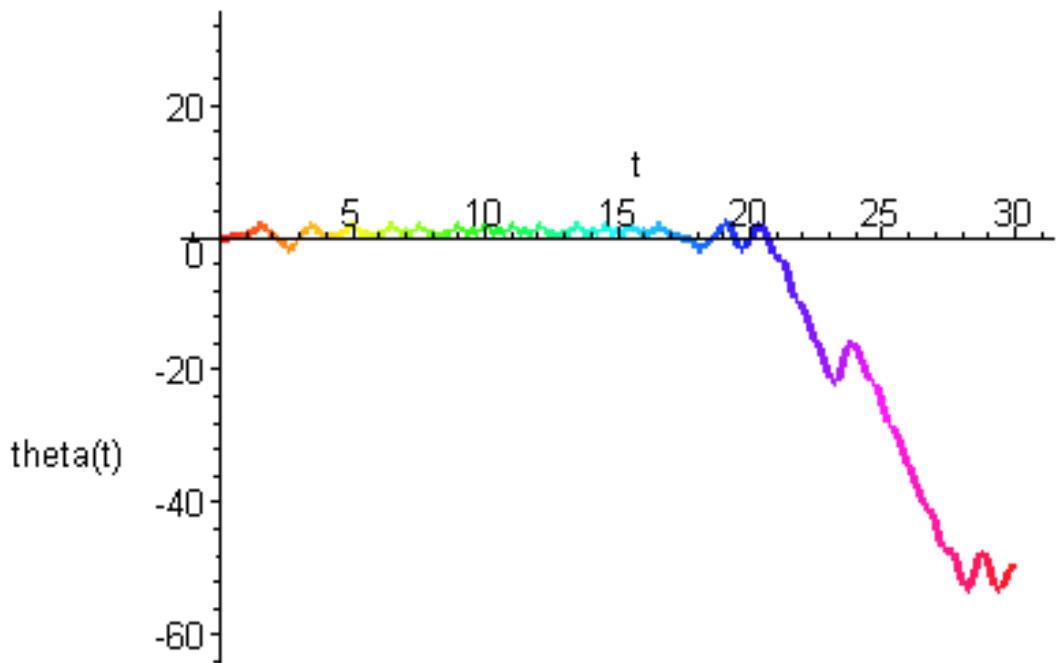
Noter la sensibilité aux conditions initiales (et donc sans doute ici à la précision du calcul approché)

```
> cond_init1:=[theta(0)=0,omega(0)=omega(rev)/1000*(1+1/100000)];
cond_init2:=[theta(0)=0,omega(0)=omega(rev)/1000*(1-1/100000)];
```

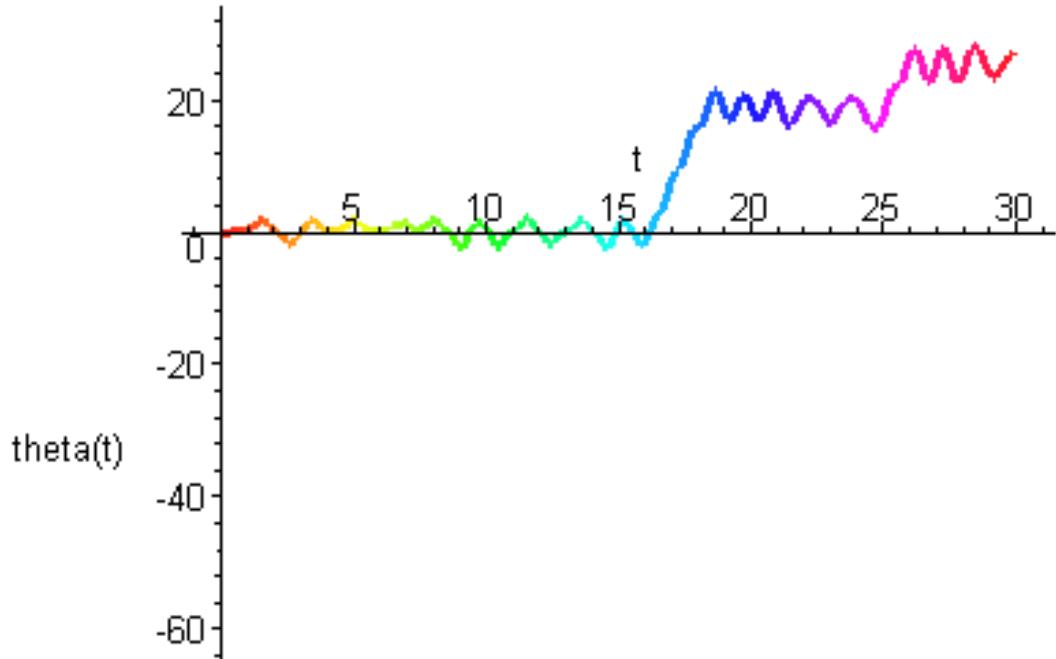
$$cond_init1 := \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{100001}{25000000} \pi \right]$$

$$cond_init2 := \left[\theta(0) = 0, \omega(0) = \frac{99999}{25000000} \pi \right]$$

```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=0..30*T0, [cond_init1], theta=-60..30, stepsize=T0/100, scene=[t,theta(t)], arrows=none, linecolor=t);
```



```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=0..30*T0, [cond_init2], theta=-60..30, stepsize=T0/100, scene=[t,theta(t)], arrows=none, linecolor=t);
```



Autres exemples avec des cycles limites

exemple:

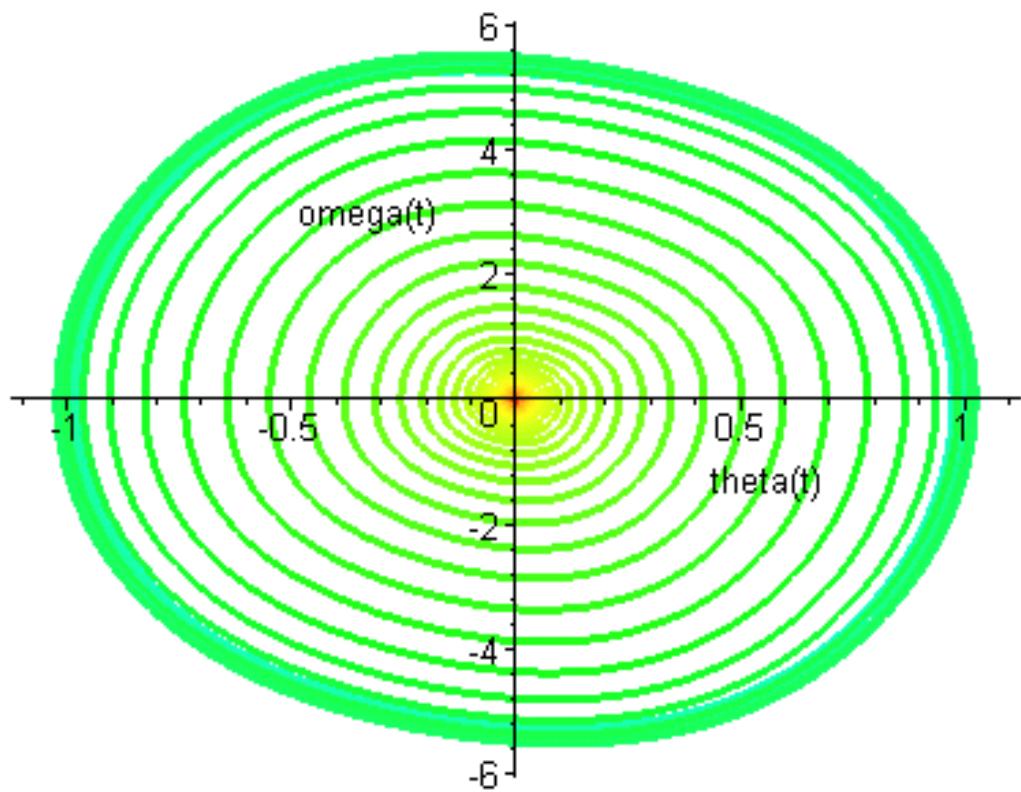
```
> alpha:=0.8795;#fréquence du cerceau
lambda0:=0.5;#vitesse du cerceau
gamma:=0.5;#frottement
```

$$\alpha := .8795$$

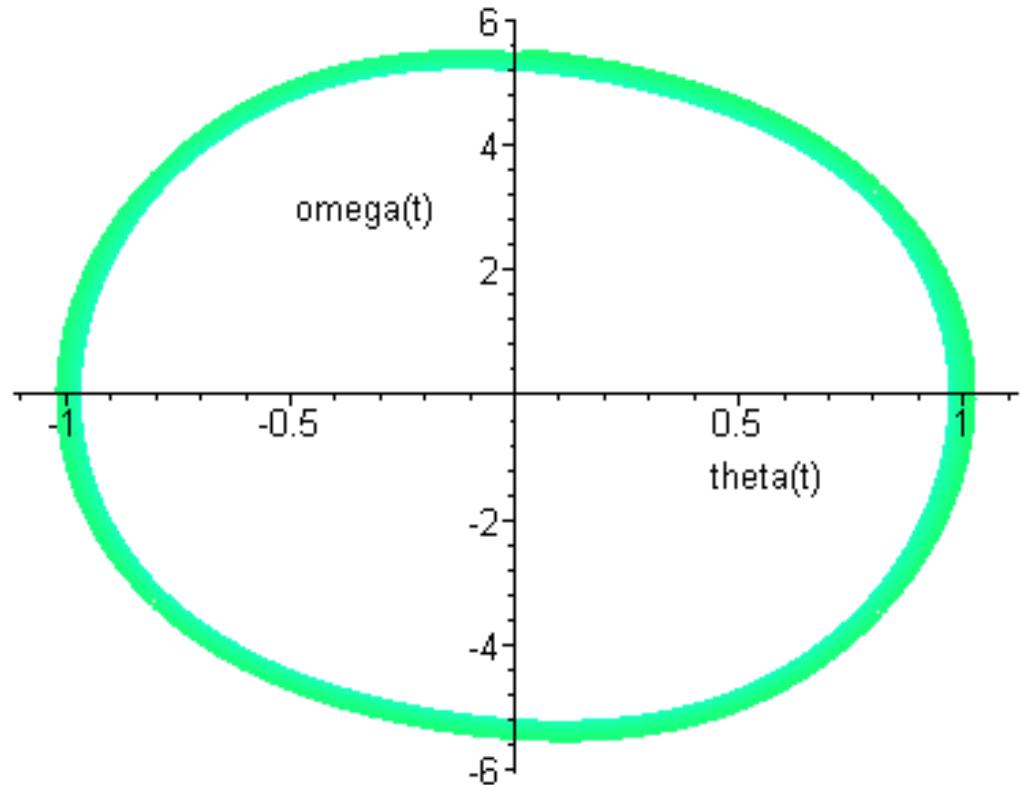
$$\lambda_0 := .5$$

$$\gamma := .5$$

```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=0..100*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[theta(t),omega(t)], arrows=none, linecolor=t);
```



```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=40..100*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[theta(t),omega(t)], arrows=none, linecolor=t);
```



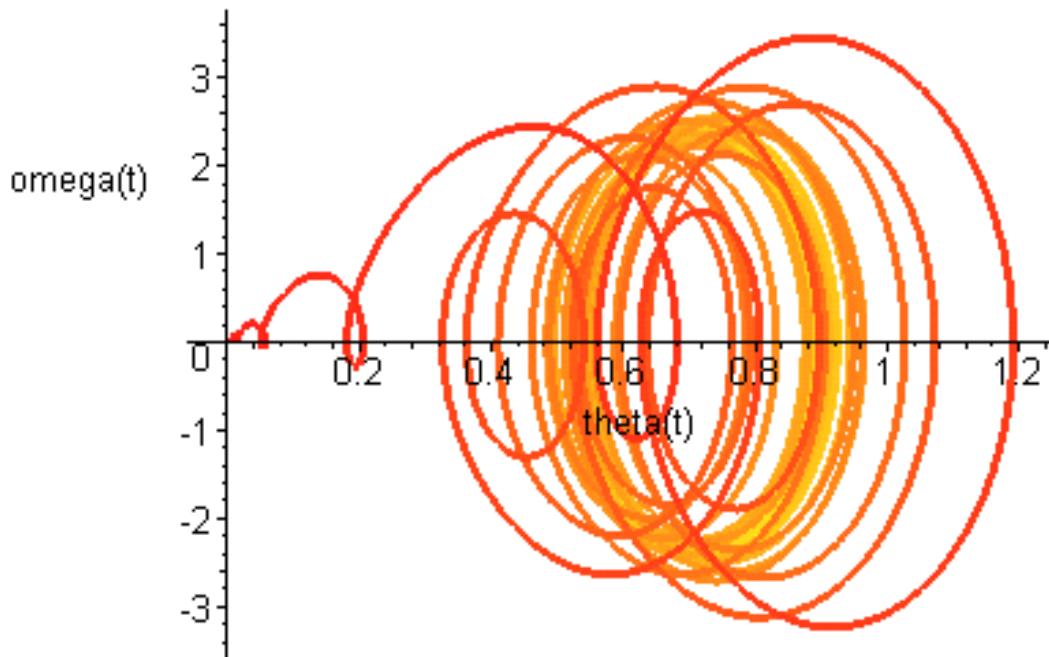
exemple:

```
> alpha:=1;#fréquence du cerceau
lambda0:=2.8;#vitesse du cerceau
```

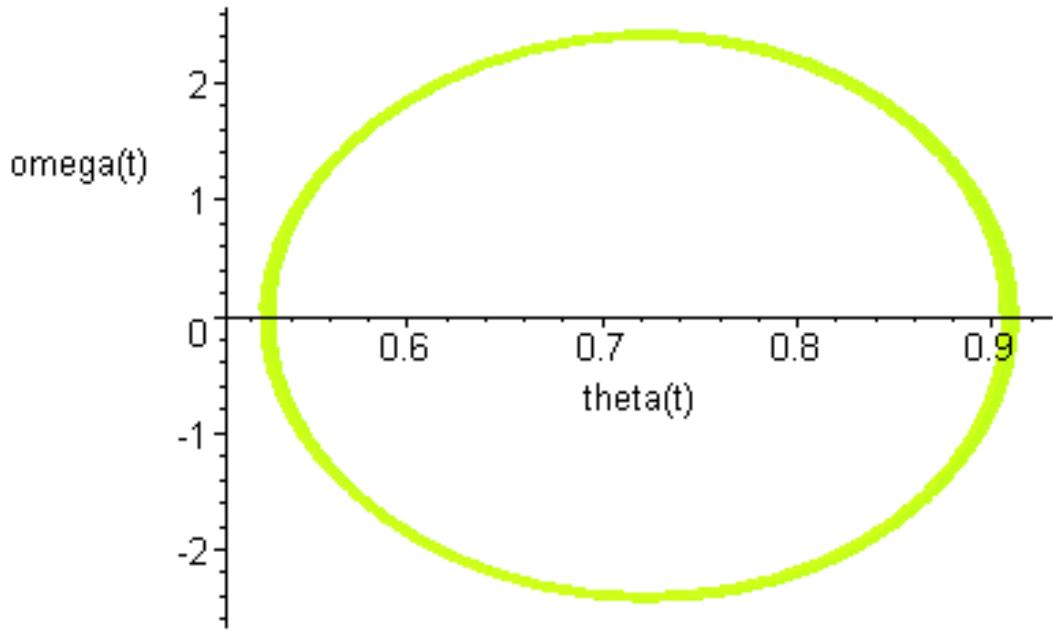
gamma:=0.5;#frottement

 $\alpha := 1$ $\lambda_0 := 2.8$ $\gamma := .5$

> DEplot([deq], [theta(t),omega(t)], t=0..100*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[theta(t),omega(t)], arrows=none, linecolor=t);



> DEplot([deq], [theta(t),omega(t)], t=20..100*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[theta(t),omega(t)], arrows=none, linecolor=t);



exemple:

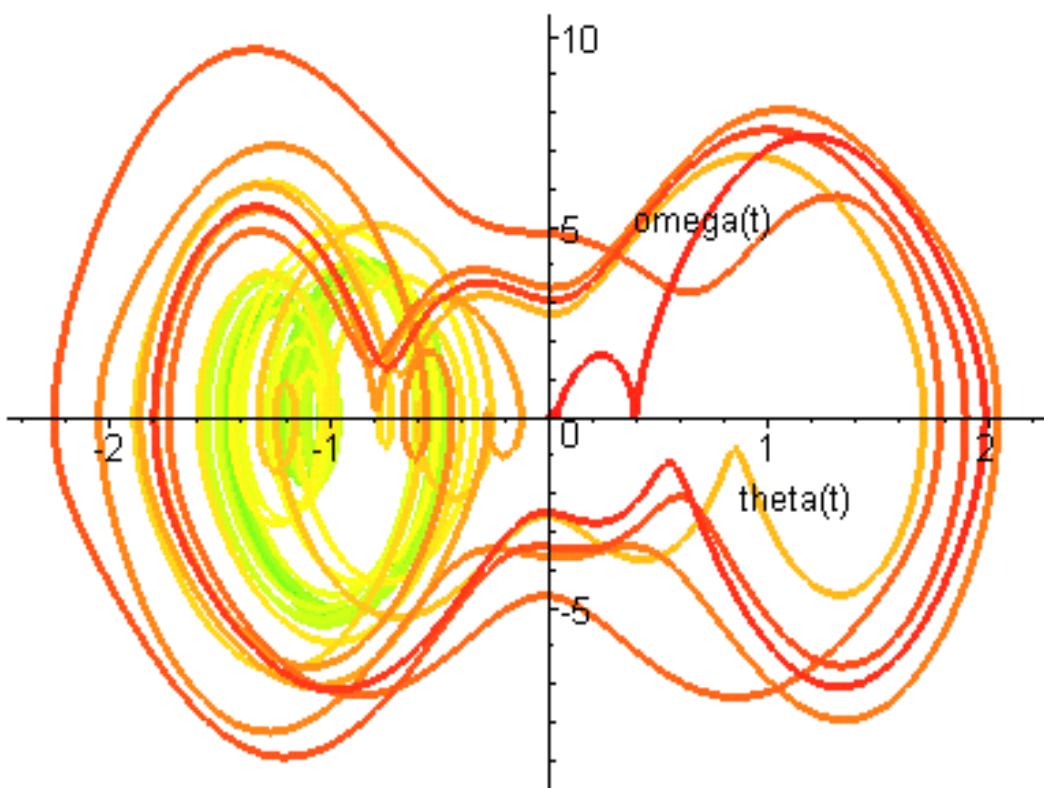
```
> alpha:=1;#fréquence du cerceau
lambda0:=4;#vitesse du cerceau
gamma:=0.5;#frottement
```

$$\alpha := 1$$

$$\lambda_0 := 4$$

$$\gamma := .5$$

```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=0..100*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[theta(t),omega(t)],
arrows=none,linecolor=t);
```



```
> DEplot( [deq], [theta(t),omega(t)], t=30..100*T0, [cond_init], stepsize=T0/100, scene=[theta(t),omega(t)], arrows=none, linecolor=t);
```

